第 4 节 含 e^x 或 $\ln x$ 的方程、不等式的处理技巧（★★★）

强化训练

1.（2023·全国模拟·★★）证明：当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$.

证法 1：（目标不等式不复杂，可考虑直接求导分析）

设 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+x+2(x>0)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x+(x-2)\mathrm{e}^x+1$

$=(x-1)\mathrm{e}^x+1$，（不易直接判断正负，故二次求导）

所以 $f''(x)=\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x>0$，故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)>0$ 恒成立，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)>0$，故当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$.

证法 2：（目标不等式中含 e^x 这一项与后面的 $x+2$ 是相加的，可考虑将其化为 $\varphi(x)\mathrm{e}^x$ 这种结构，再求导）

当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x+1>0$ ①，

设 $g(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x+1(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2}\mathrm{e}^x+\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=0$，所以 $g(x)>0$，即 $\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x+1>0$，结合①可得当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$ 成立.

2.（2023·贵州模拟·★★）证明：$x\ln x-x+1\ge0$.

证法 1：（目标不等式不复杂，先尝试直接求导分析）

设 $f(x)=x\ln x-x+1(x>0)$，则 $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x$，

所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，$f'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f(1)=0$，所以 $f(x)\ge0$，故 $x\ln x-x+1\ge0$.

证法 2：（目标不等式中有 $x\ln x$，可尝试同除以 x 孤立 $\ln x$，再构造函数求导分析）

要证 $x\ln x-x+1\ge0$，只需证 $\ln x-1+\dfrac{1}{x}\ge0$，设 $g(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

所以 $g'(x)>0\Leftrightarrow x>1$，$g'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<1$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$，所以 $g(x)\ge0$，从而 $\ln x-1+\dfrac{1}{x}\ge0$，故 $x\ln x-x+1\ge0$.

3.（2023·北京模拟·★★★）证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{2}x+1>\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

证明：（若直接作差构造函数求导分析，显然 $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ 这部分会变得复杂，故尝试两端同乘以 x，将 $\ln(x+1)$

孤立）

要证$\frac{1}{2}x+1>\frac{\ln(x+1)}{x}$，只需证$\frac{1}{2}x^2+x>\ln(x+1)$，即证$\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)>0$，

设$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)(x>0)$，则$f'(x)=x+1-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x}{x+1}>0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$f(0)=0$，所以$f(x)>0$，即$\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)>0$，

所以当$x>0$时，$\frac{1}{2}x+1>\frac{\ln(x+1)}{x}$成立.

4.（2022•广东开学•★★★）已知函数$f(x)=\frac{2(\mathrm{e}^x-x-1)}{x^2}$，证明：当$x>0$时，$f(x)>1$.

证法 1：（若直接对$f(x)$求导，则计算较为繁琐，所以先将原不等式等价转化，再证，一种转化方法是两端同乘以x^2去分母，再作差构造）

$f(x)>1\Leftrightarrow 2(\mathrm{e}^x-x-1)>x^2\Leftrightarrow 2(\mathrm{e}^x-x-1)-x^2>0$，所以只需证$2(\mathrm{e}^x-x-1)-x^2>0$，

设$g(x)=2(\mathrm{e}^x-x-1)-x^2(x>0)$，则$g'(x)=2(\mathrm{e}^x-1)-2x=2(\mathrm{e}^x-x-1)$，$g''(x)=2(\mathrm{e}^x-1)>0$，

所以$g'(x)$在$(0,+\infty)$上↗，又$g'(0)=0$，所以$g'(x)>0$，故$g(x)$在$(0,+\infty)$上↗，

因为$g(0)=0$，所以$g(x)>0$，即$2(\mathrm{e}^x-x-1)-x^2>0$，故当$x>0$时，$f(x)>1$.

证法 2：（将$f(x)>1$等价转化为$2(\mathrm{e}^x-x-1)>x^2$后，考虑到e^x与其余部分做乘法或除法，更易于求导研究，所以也可朝此方向等价转化）

$f(x)>1\Leftrightarrow 2(\mathrm{e}^x-x-1)>x^2\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x>x^2+2x+2\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}<2$，所以要证$f(x)>1$，只需证$\frac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}<2$，

设$h(x)=\frac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}(x>0)$，则$h'(x)=\frac{(2x+2)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x(x^2+2x+2)}{(\mathrm{e}^x)^2}=-\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}<0$，

所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上↘，又$h(0)=2$，所以$h(x)<2$，即$\frac{x^2+2x+2}{\mathrm{e}^x}<2$，故当$x>0$时，$f(x)>1$.

5.（2022•新高考 I 卷节选•★★★）已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同的最小值，求a.

解：（题干提到了最小值，所以先求导，研究单调性）

由题意，$f'(x)=\mathrm{e}^x-a(x\in\mathbf{R})$，$g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}(x>0)$，

（观察可得$f'(x)$和$g'(x)$是否有零点，都是与a的正负有关，所以据此讨论）

当$a\le 0$时，$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，故$g(x)$没有最小值，不合题意；

当$a>0$时，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln a$，$f'(x)<0\Leftrightarrow x<\ln a$，

所以$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减，在$(\ln a,+\infty)$上单调递增，故$f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$，

$g'(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{a}$，$g'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{a}$，所以$g(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增，

故$g(x)_{\min}=g(\frac{1}{a})=1-\ln\frac{1}{a}=1+\ln a$，由题意，$a-a\ln a=1+\ln a$，所以$a-1-(a+1)\ln a=0$ ①，

（观察可得 $a=1$ 是此方程的解，但要说明解的唯一性，还需构造函数求导分析，式①中有 $(a+1)\ln a$，故同除以 $a+1$ 将 $\ln a$ 孤立出来，便于求导研究）

式①等价于 $\dfrac{a-1}{a+1}-\ln a=0$ ②，

设 $h(a)=\dfrac{a-1}{a+1}-\ln a(a>0)$，则 $h'(a)=\dfrac{2}{(a+1)^2}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{a^2+1}{a(a+1)^2}<0$，所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(1)=0$，所以 $h(a)$ 有唯一的零点 1，从而当且仅当 $a=1$ 时，方程②成立，故 $a=1$.

6.（2023•新高考Ⅰ卷•★★★）已知函数 $f(x)=a(\mathrm{e}^x+a)-x$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

解：（1）由题意，$f'(x)=a\mathrm{e}^x-1$，（$f'(x)=0\Rightarrow x=\ln\dfrac{1}{a}$，但这个零点只在 $a>0$ 时有意义，故据此讨论）

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f'(x)<0\Leftrightarrow a\mathrm{e}^x-1<0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x<\dfrac{1}{a}\Leftrightarrow x<\ln\dfrac{1}{a}$，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>\ln\dfrac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\ln\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增.

（2）由（1）可得当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f(\ln\dfrac{1}{a})=a(\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{a}}+a)-\ln\dfrac{1}{a}=a(\dfrac{1}{a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$，

（要证 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，只需证 $f(\ln\dfrac{1}{a})>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，此不等式中 $\ln a$ 已孤立，故直接移项构造函数分析）

令 $g(a)=f(\ln\dfrac{1}{a})-2\ln a-\dfrac{3}{2}(a>0)$，则 $g(a)=a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}$，

（接下来只需证 $g(a)>0$，故求导研究 $g(a)$ 的单调性）

$g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$，所以 $g'(a)>0\Leftrightarrow a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g'(a)<0\Leftrightarrow 0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

从而 $g(a)$ 在 $(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(a)\ge g(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}=-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$，所以 $f(\ln\dfrac{1}{a})>2\ln a+\dfrac{3}{2}$，

又因为 $f(\ln\dfrac{1}{a})$ 是 $f(x)$ 的最小值，所以 $f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

【反思】注意，本题第（2）问 $\ln a$ 已经孤立，故无需变形，直接构造函数分析即可.